

Colegiul Național “Dr. Ioan Meșotă”

Testare la matematică – Clasa a 11-a – 1.09.2026

Barem

1. (2p) Se consideră matricea $(a) = \begin{pmatrix} a & a+1 & a+2 \\ a^2+1 & a^2+2 & a^2+3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

- a) Demonstrați că, pentru orice număr real a , matricea $A(a)$ este inversabilă.
b) Determinați numerele întregi a pentru care inversa matricei $A(a)$ are toate elementele numere întregi.

- a) $\det(A(a)) = -a^2 + a - 1$ 0,5p
 $-a^2 + a - 1 \neq 0, \forall a \in \mathbb{R}$, deci matricea $A(a)$ este inversabilă0,5p
b) $\det(A(a)) \in \{-1, 1\}$ 0,5p
deci $a = 0$ sau $a = 1$ 0,5p

2. (2p) Se consideră sistemul: $\begin{cases} x + y + az = 1 \\ x + ay + z = -1 \\ 2x + 3y + 3z = 0 \end{cases}$, unde $a \in \mathbb{R}$.

- a) Determinați numărul întreg a pentru care sistemul admite soluția unică (x_0, y_0, z_0) , cu x_0, y_0, z_0 numere întregi.
b) Pentru $a = 2$ determinați soluția (x_0, y_0, z_0) a sistemului pentru care x_0, y_0, z_0 sunt numere întregi care verifică relația $y_0 \cdot z_0 < 0$.

- a) $\left(0, \frac{-1}{a-1}, \frac{1}{a-1}\right)$ este soluție unică pentru $a \in \mathbb{Z} - \{1, 2\}$ 0,5p
 $a = 0$ 0,5p
b) $S = \{(3 - 3z, z - 2, z) / z \in \mathbb{R}\}$ 0,5p
 $z = 1, (0, -1, 1)$ este soluția0,5p

3. (3p) Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{e^{2x} + x^4 + 2}$.

a) Arătați că $f'(x) = \frac{e^{2x} + 2x^3}{\sqrt{e^{2x} + x^4 + 2}}, x \in \mathbb{R}$.

b) Demonstrați că tangenta la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = 0$ situat pe graficul funcției este paralelă cu dreapta de ecuație $x - \sqrt{3}y = 0$.

c) Demonstrați că funcția f are un unic punct de extrem.

a) $f'(x) = \frac{e^{2x} + 2x^3}{\sqrt{e^{2x} + x^4 + 2}}, x \in \mathbb{R}$1p

b) $m_t = f'(0) = \frac{\sqrt{3}}{3} = m_d$ 1p

c) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = e^{2x} + 2x^3$ strict crescătoare.....0,5p
 f are un unic punct de extrem.....0,5p

4. (2p) Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 e^{-x}$.

a) Arătați că $f'(x) = x(2 - x)e^{-x}, x \in \mathbb{R}$.

b) Demonstrați că, pentru orice număr $\in (0, 4e^{-2})$, ecuația $f(x) = a$ are exact trei soluții reale.

a) $f'(x) = x(2 - x)e^{-x}, x \in \mathbb{R}$ 1p

b) Intervale de monotonie0,5p

pentru orice număr $a \in (0, 4e^{-2})$, ecuația $f(x) = a$ are exact trei soluții reale...0,5p